Unidad IV

Series.

4.1 Definición de seria.

Una **serie** es la generalización de la noción de suma a los términos de una sucesión infinita. Informalmente, es el resultado de sumar los términos: $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ lo cual suele escribirse en forma más compacta con el símbolo de sumatorio: $\sum a_n$.

El estudio de las series consiste en la evaluación de la suma de un número finito *n* de términos sucesivos, y mediante un pasaje al límite identificar el comportamiento de la serie a medida que *n* crece indefinidamente.

Una secuencia o cadena «finita», tiene un primer y último término bien definidos; en cambio en una **serie infinita**, cada uno de los términos suele obtenerse a partir de una determinada regla o fórmula, o por algún algoritmo. Al tener infinitos términos, esta noción suele expresarse como *serie infinita*, pero a diferencia de las sumas finitas, las series infinitas requieren de herramientas del análisis matemático para ser debidamente comprendidas y manipuladas. Existe una gran cantidad de métodos para determinar la naturaleza de convergencia o no-convergencia de las series matemáticas, sin realizar explícitamente los cálculos.

Sumas parciales

La **sucesión de sumas parciales** $\{S_k\}$ asociada a una sucesión $\{a_n\}$ está definida para cada k como la suma de la sucesión $\{a_n\}$ desde a_0 hasta a_k:

$$S_k = \sum_{n=0}^{k} a_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_k.$$

Muchas de las propiedades generales de las series suelen enunciarse en términos de las sumas parciales asociadas.

Convergencia

Por definición, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ **converge** al límite L si y solo si la sucesión de sumas parciales asociada S_k converge a L. Esta definición suele escribirse como

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Leftrightarrow L = \lim_{k \to \infty} S_k$$.

4.1.1 Finita.

Si la sucesión sigue para siempre, es una sucesión infinita,
si no es una sucesión finita

Ejemplos

{1, 2, 3, 4 ,...} es una sucesión muy simple (y es una sucesión infinita)
{20, 25, 30, 35, ...} también es una sucesión infinita
{1, 3, 5, 7} es la sucesión de los 4 primeros números impares (y es unasucesión infinita)
{4, 3, 2, 1} va de 4 a 1 hacia atrás
{1, 2, 4, 8, 16, 32, ...} es una sucesión infinita donde vamos doblando cada término
{a, b, c, d, e} es la sucesión de las 5 primeras letras en order alfabético
{a, l, f, r, e, d, o} es la sucesión de las letras en el nombre "alfredo"
{0, 1, 0, 1, 0, 1, ...} es la sucesión que alterna 0s y 1s (sí, siguen un orden, en este caso un orden alternativo)

En orden

Cuando decimos que los términos están "en orden", ¡nosotros somos los que decimos qué orden! Podría ser adelante, atrás... o alternando... ¡o el que quieras!
Una sucesión es muy parecida a un conjunto, pero con los términos en orden (y el mismo valor sí puede aparecer muchas veces).

Ejemplo: {0, 1, 0, 1, 0, 1, ...} es la sucesión que alterna 0s y 1s. El conjuntosería sólo {0,1}

La regla

Una sucesión sigue una regla que te dice cómo calcular el valor de cada término.
Ejemplo: la sucesión {3, 5, 7, 9, ...} empieza por 3 y salta 2 cada vez:

4.1.2 Infinita.

En matemáticas, la expresión 1 − 2 + 3 − 4 + · · · es una serie infinita cuyos términos son los números enteros positivos, que van alternando sus signos. Utilizando notación matemática para sumatorias, la suma de los primeros *m*términos de la serie se expresa como:

EJEMPLO 1:

En las observaciones iníciales de este capítulo se indicó que la representación decimal del numero racional 13 es en la realidad, una serie infinita.

310 +310 2 +3103 +k=1∞310k

* SUCESIÓN DE SUMAS PARCIALES

Para cada serie infinita ∑ ak existe una sucesión de sumas parciales {Sn} definida como sigue:

S1 = a1

S2 = a1 + a2

S3 = a1 + a2 + a3

.

.

.

Sn = a1 + a2 + a3 +… +an

EJEMPLO 2 :

La sucesión de sumas parciales de k=1∞310k es

S1 = 310

S2 = 310 + 3102

S3 = 310 + 3102 + 3103

Sn =   310 + 3102 + 3103 + 310n

En el ejemplo 2 cuando n es muy grande Sn, dará una buena aproximación a 13 y de esta manera parece razonable escribir 13 =limn→∞k=1n310k =k=1∞310k

Esto conduce a la definición siguiente:

Se dice que una serie infinita k=1∞ak es converge la sucesión de sumas parciales {Sn}; esto es limn→∞k=1∞ak =S .

El numero S es la suma de las serie ,S ; limn→∞Sn no existe , se dice entonces que la serie es divergente

TEOREMA

Si la serie infinita k=1+∞un es convergente , entonces limn→∞un= 0

Fuente Bibliografica
http://es.wikipedia.org/wiki/1_%E2%88%92_2_%2B_3_%E2%88%92_4_%2B_%C2%B7_%C2%B7_%C2%B7

Publicado por Nochi 19 en 14:25

4.2 Serie numérica y convergencia Prueba de la razón (criterio de D´Alembert) y Prueba de la raíz (criterio de Cauchy).

SERIES NUM´ERICAS.

1.Convergencia.

Si {an} es una sucesion de numeros reales, se define la serie de termino general an y se escribe   como:

Si este lımite de la enesima suma parcial a1 + · · · + an es finito, se dice que la serie es
convergente; si es infinito o no existe, que es divergente.

2. Convergencia absoluta.
Se dice que la seriees absolutamente convergente si la serie es convergente.
Toda serie absolutamente convergente es convergente.
Si una serie es absolutamente convergente, entonces cualquier reordenacion suya tambien lo es y tiene el mismo valor.
Se dice que una serie es condicionalmente convergente si es convergente, pero no absolutamente convergente.
3. Propiedades.
• El caracter (convergente o divergente) de una serie no cambia si se modifica un numero finito de sus terminos.
• Para que la serieconverja es necesario que lim an = 0.

4.3 Serie de potencias.

Una serie de potencias puede ser interpretada como una función de "*x":*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-c)^n$$

Cuyo dominio es el conjunto de los x 2 R para los que la serie es convergente y el valor def(x) es, precisamente, la suma de la serie en ese punto x.

Las series de potencias, vistas como funciones, tienen un comportamiento bueno, en el sentido de que son funciones continuas y derivables de cualquier orden. Más aun, su función derivada es, otra vez, una serie de potencias. Desde un punto de vista más practico, las series de potencias aproximan a su función suma. Es decir, la suma parcial de orden n, que no es más que un polinomio de grado n a lo sumo, representa una aproximación a la función suma en su dominio de convergencia. En la siguiente figura (Figura 1.0), puede verse la función f(x) = ex junto con algunas aproximaciones mediante sumas parciales de su serie de potencias.

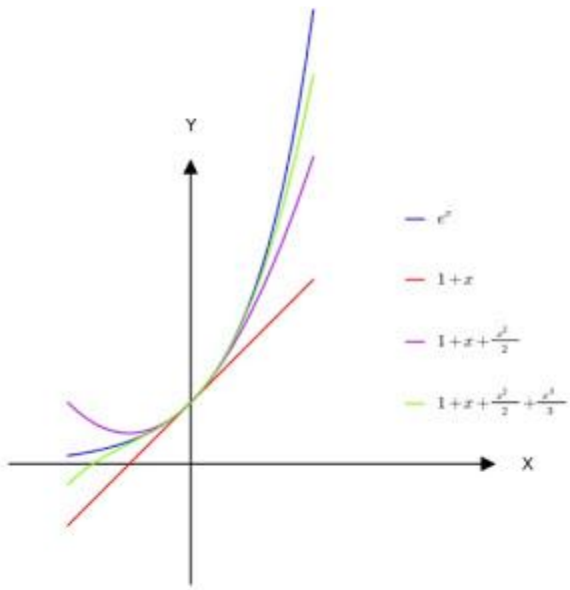


Figura 1.0: Aproximacion a ex por su serie de potencias

La siguiente imagen muestra el teorema de la serie de potencias, ejemplificando lo descrito anteriormente.

TEOREMA.

Si la función f viene definida por una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ con radio de convergencia $R > 0$ entonces

(a) f es continua en todo punto interior al intervalo de convergencia.

(b) f es derivable en el intervalo de convergencia y su derivada $f'(x)$ puede obtenerse mediante la derivación término a término: $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1}$ siendo el radio de convergencia de esta serie también R.

(c) f es integrable en el intervalo de convergencia y, además, se puede integrar término a término:

$$\int f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int a_n (x-a)^n\,dx\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1} + k$$

siendo el radio de convergencia de esta serie también R.

4.4 Radio de convergencia.

Si nos limitamos al conjunto de los numeros reales, una serie de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad \text{, con} \quad a_n, x, x_0 \in \mathbb{R}.$$

recibe el nombre de serie de potencias centrada en x_0. La serie converge absolutamente para un conjunto de valores de x que verifica que $|x - x_0| < r$, donde r es un número real llamado radio de convergencia de la serie. Esta converge, pues, al menos, para los valores de x pertenecientes al intervalo $(x_0 - r, x_0 + r)$, ya que la convergencia para los extremos de este ha de estudiarse aparte, por lo que el intervalo real de convergencia puede ser también semiabierto o cerrado. Si la serie converge solo para x_0, $r = 0$. Si lo hace para cualquier valor de x, $r = \infty$

La función $1 / (1 - x)$ en su desarrollo con centro 0, o sea, en series de potencia $x - x_0 = x - 0 = x$, tiene el siguiente aspecto:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

Su radio de convergencia es $r = 1$. Eso significa que para calcular si tomo cualquier valor cuya distancia al $x_0 = 0$ es menor que $r = 1$, por ejemplo el $x = 0.25$, entonces al remplazarlo en la serie el resultado de calcular la serie será el mismo que remplazarlo en la función, de hecho

$$\sum_{n=0}^{\infty} 0.25^n = 1 + 0.25 + 0.25^2 + 0.25^3 + \ldots = \frac{4}{3}.$$

(la cuenta se puede hacer por serie de potencia). Y por otro lado

$$\frac{1}{1-0.25} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}.$$

4.5 Serie de Taylor.

La serie de Taylor es una serie funcional y surge de una ecuación en la cual se puede encontrar una solución aproximada a una función, se basa en ir haciendo operaciones según una ecuación general y mientras mas operaciones tenga la serie mas exacto será el resultado que se esta buscando. Dicha ecuación es la siguiente:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a)^1 + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n$$

También representada como:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Donde: *n!* es el factorial de n.

$F^{(n)}$ es la enésima derivada de *f* en el punto *a*

Como se puede observar en la ecuación, hay una parte en la cual hay que desarrollar un binomio $(x\text{-}a)^n$ por lo que para simplificar el asunto se igualara a "a" siempre a 0. Para fines prácticos no afecta mucho en el resultado si se hacen muchas operaciones en la serie.

La serie de Taylor proporciona una buena forma de aproximar el valor de una función en un punto en términos del valor de la función y sus derivadas en otro punto.

Por supuesto, para hacer esta aproximación sólo se pueden tomar unas cuantas expresiones de esta serie, por lo que el resto resulta en un error conocido como el término residual, es a criterio del que aplica la serie en numero de términos que ha de incluir la aproximación.

Pueden resolver por aproximación funciones trigonométricas, exponenciales, logarítmicas etc...

4.6 Representación de funciones mediante la serie de Taylor.

Teorema de Taylor. Si la función *f* y sus primeras *n*+1 derivadas son continuas en un intervalo que contiene a *a* y a *x*, entonces el valor de la función en un punto *x* está dado por:

Existen series de Taylor para: Función exponencial y función Coseno.

Funcion e

Se puede aplicar la ecuación de las series de Taylor como más sencillo le resulte a cada quien, una de tantas formas la explicare aquí.
Lo primero que se hace es derivar unas 3 o 4 veces la función, esto porque algunas funciones empiezan a tener un patrón repetitivo después de cierto número de derivaciones, como la función *e*.
Después se tiene que sustituir "a" en cada una de las derivadas, pero como se decidió que "a" era 0 se sustituye un 0 en cada derivada y se observa que resultados da.

$$f(x) = e^x ----------- f(0) = 1$$
$$f'(x) = e^x ----------- f'(0) = 1$$
$$f''(x) = e^x ----------- f''(0) = 1$$

Esto de sustituir en cada derivada es solo para simplificar la ecuación de la serie y para darnos una idea de como se comporta la función. Una vez que se tiene una idea del comportamiento de la función se puede ir empezando a armar la ecuación de la serie

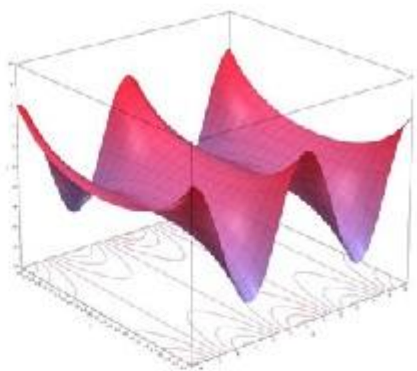
$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}(x-0)^1 + \frac{1}{2}(x-0)^2 + \ldots \frac{1}{n!}(x-0)^n$$

Con las primeras operaciones que se hicieron al principio se puede ver como se irá llenando la serie mientras más elementos se le agreguen para que el resultado sea más preciso. Todo esto fue para ver como es la serie de la función e, ahora para conocer algún resultado simplemente se sustituye en donde quedaron las x y ya está

$$e^5 = 1 + \frac{5}{1!} + \frac{5^2}{2!} + \frac{5^3}{3!} + \frac{5^4}{4!} + \ldots \frac{5^n}{n!}$$

Función Coseno

Para el coseno el procedimiento es el mismo.
Primero se deriva varias veces la función y se sustituye en valor de "a" en cada una para observar el patrón.



$$f(x) = \cos x ----------- f(0) = 1$$
$$f'(x) = -senx ---------- f'(0) = 0$$
$$f''(x) = -\cos x ---------- f''(0) = -1$$
$$f'''(x) = senx ----------- f'''(0) = 0$$
$$f''''(x) = \cos x ----------- f''''(0) = 1$$

Despues se va llenando la serie de Taylor para despues hacer una ecuacion general:

$$\cos x = 1 + \frac{0}{1!}(x-0) - \frac{1}{2!}(x-0)^2 + \frac{0}{3!}(x-0)^3 + \frac{1}{4!}(x-0)^4 \ldots$$

Para otras funciones continuas diferenciables, como las exponenciales o sinusoidales, no se obtiene una estimación exacta mediante un número finito de términos.El valor práctico de las *series de Taylor* radica en el uso de un número finito de términos que darán una aproximación lo suficientemente cercana a la solución verdadera para propósitos prácticos